اسم المحاضرة

اسم الدكتور : اسماعيل ادريس

التاريخ :

اسم المادة : رياضيات نظري (١٢)

- إذا كانت إحدى قواعد الفضاء الشعاعي V مؤلفة من n عنصر فإن كل قواعد هذا الفضاء مؤلفة من n عنصر أيضاً .

- نسمي العدد n ببعد الفضاء الشعاعي V و نرمز له عادة ب :

$$\text{Diminsion} = \boxed{\text{Dim } V = n}$$

مثال 1 : ليكن كثير الحدود P_3 معرف كمايلي : $\{1, t, t^2, t^3\}$ ماهو بعد فضاء كثيرات الحدود من الشكل P_3 ؟

الحل :

$$\text{Dim } P_3 = 4$$

- وبشكل عام يمكننا أن نكتب : $\boxed{\text{Dim } P_n = n+1}$

مثال 2 : لتكن $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

هل تشكل $\{e_1, e_2, e_3\}$ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$ وماهو بعد الفضاء الذي تولده هذه الأشعة ؟؟

الحل: بما أنه يوجد عنصر ارتكاز في كل سطر فإن مجموعة الأشعة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ مستقلة خطياً وتولد الفضاء $\mathbb{R}^3$ عندئذ بعد الفضاء هو 3 .

مثال 3: أوجد بعد الفضاء الشعاعي المعطى بالعلاقة التالية :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a + b + 2c \\ 2a + 2b + 4c + d \\ b + c + d \\ 2a + 2c + d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

الحل:

$$a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{v_3} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_4}$$

$$W = SPAN = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

وبما أن v_3 هو حاصل جمع v_1 و v_2 وبالتالي فإن الأشعة مرتبطة خطياً .

أما v_1 و v_2 و v_4 فهي مستقلة وهي تولد الفضاء W وبالتالي :

$Dim\ W = 3$ إذاً أساس W هي مجموعة من الأشعة $\{v_1, v_2, v_4\}$

ملاحظة: إذا كانت مجموعة منتهية من الأشعة تولد الفضاء V نقول عن الفضاء V أنه فضاء منتهي البعد (Finite deminsion) أما إذا كان عدد الأشعة المولدة للفضاء V غير منتهي نقول أن الفضاء V فضاء غير منتهي البعد (Infinite Diminsion)

أمثلة عامة على البحث الأول:

1 لتكن B و C من النظم 4x4 حيث أن $\det B = 2$ و $\det C = 5$

لنفرض أن المصفوفة A ذات الشكل

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

ⓐ أوجد المحدد $\det\left(3(B^{-3}C^2)\right)^T$

ⓑ بالاستفادة من قاعدة كرامر (Crammer's Rule) أوجد قيمة X_2 للنظام الخطي $AX = b$ حيث أن $b^T = (5 \quad 7 \quad 2 \quad 3)$

ⓒ بين لماذا لا يمكن استخدام قاعدة كرامر دائماً موضحاً إجابتك بمثال.

الحل:

a- $\det\left(3(B^{-3}C^2)\right)^T = \det\left(3(B^{-3}C^2)\right)$

$$= 3^4 \det(B^{-3}) \cdot \det(C^2) = 81 \cdot \frac{1}{8} \cdot 25 = \frac{2025}{8}$$

b- بالاعتماد على قاعدة كرامر لدينا $X_2 = \frac{\det E}{\det A}$ حيث أن

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ولكن بما أنه يوجد في المصفوفة E عمودين متماثلين فإن $\det E = 0$

والمصفوفة E غير قابلة للقلب أي أن $X_2 = 0$

c - لا يمكن استخدام قاعدة كرامر بشكل دائم لأن هذه القاعدة تطبق فقط باستخدام حرطي الذي مصفوفة أمثاله تكون قابلة للقلب ، على سبيل المثال لا يمكن استخدام قاعدة كرامر لحل: $3X + 4y = 7$

مثال لتكن A و B و C مصفوفات نظامية (غير شاذة) من النظم 2×2 و المطلوب :

a - أوجد A إذا علمت أن $(A^{-1} - 2I)^T = -2\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

b - أثبت أن $(I + BA)^{-1} = I - (B^{-1} + A)^{-1} \cdot A$

الحل : نأخذ transporte للطرفين :

$(A^{-1} - 2I) = -2\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ (A is symmetric) متجانس

$A^{-1} = 2I - 2\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}0 & -2\\-2 & 2\end{bmatrix}$

تذكرة :
$(A^T)^T = A$
$(A^{-1})^{-1} = A$
$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

نأخذ مقلوب الطرفين :

$\det\begin{bmatrix}0 & -2\\2 & 2\end{bmatrix} = -4$

$A = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 0\end{bmatrix} = A^*$

b. نفرض :

$$A = (A^{-1})^{-1} \quad , \quad D = (A^{-1}) \quad , (B^{-1} + A) = C$$

$$(I + BA)^{-1} = I - (B^{-1} + A)^{-1} A$$

$$(I + BA)^{-1} = I - (A^{-1}(B^{-1} + A))^{-1}$$

$$(I + BA)^{-1} = I - ((BA)^{-1} + I)^{-1}$$

نضرب الطرفين بـ $(BA)^{-1} + I$ فنجد :

$$((BA)^{-1} + I)(I + BA)^{-1} = I \cdot ((BA)^{-1} + I) - I$$

$$((BA)^{-1} + I)(I + BA)^{-1} = (BA)^{-1} + I - I$$

$$((BA)^{-1} + I)(I + BA)^{-1} = (BA)^{-1}$$

$$(BA)^{-1} + I = (BA)^{-1} \cdot (I + BA)$$

$$(BA)^{-1} + I = (BA)^{-1} + I$$

$$(BA)^{-1} = (BA)^{-1}$$

- Good luck ☺ -